**Задание №6**

Решить транспортные задачи.

№1. Совхозы выделяют соответственно 30, 40, 90 центнеров молока, используемого для снабжения 4-х населенных пунктов и . Каждому из них необходимо соответственно 30, 30, 90 и 10 центнеров молока. Матрица тарифов

Найти оптимальный план закрепления совхозов за населёнными пунктами.

Исходный план находить методом северо-западного угла.

**Решение.** Таблица, соответствующая условию задачи, имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 30 | | 30 | | 90 | | 10 | |
|  |  |
| 30 | |  | 3 |  | 5 |  | 4 |  | 1 |
|  | |  | |  | |  | |
| 40 | |  | 1 |  | 8 |  | 2 |  | 1 |
|  | |  | |  | |  | |
| 90 | |  | 3 |  | 2 |  | 6 |  | 9 |
|  | |  | |  | |  | |

Это задача закрытого типа, т.к.

Математическая модель задачи:

Получаем исходный опорный план методом северо-западного угла. Заполняем таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | | |  | | | |  | | |  | |  |
|  |  |  | 30 | | | 30 | | | | 90 | | | 10 | |  |
|  |  |  |
|  | 30 | |  | 3 | |  | 5 | | |  | 4 | |  | 1 |  |
|  | 30 | |  | 0 | |  | | - | |  | - |  |
|  | 40 | |  | 1 | |  | 8 | | |  | 2 | |  | 1 |  |
|  | - | |  | 30 | | | -Q | 10 | | +Q | - |  |
|  | 90 | |  | 3 | |  | 2 | | |  | 6 | |  | 9 |  |
|  | - | |  | - | | | +Q | 80 | | -Q | 10 |  |
|  |  | |  | | |  | | | |  | | |  | |  |

Таким образом, опорный план:

Число базисных клеток . В добавленной таблице шесть заполненных клеток, включая клетку (1,2) с базисным нулем.

Вычисляем .

Вычисляем оценки свободных клеток , , , , , .

План не оптимален. Строим в таблице цикл пересчета для клетки (3,2). Определяем :

Новый опорный план заносим в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | | |  | | | |  | | |  | |  |
|  |  |  | 30 | | | 30 | | | | 90 | | | 10 | |  |
|  |  |  |
|  | 30 | |  | 3 | |  | 5 | | |  | 4 | |  | 1 |  |
|  | 30 | |  | 0 | | -Q | | - | |  | - | +Q |
|  | 40 | |  | 1 | |  | 8 | | |  | 2 | |  | 1 |  |
|  | - | |  | - | | |  | 40 | |  | - |  |
|  | 90 | |  | 3 | |  | 2 | | |  | 6 | |  | 9 |  |
|  | - | |  | 30 | | | +Q | 50 | |  | 10 | -Q |
|  |  | |  | | |  | | | |  | | |  | |  |

Базисных заполненных клеток 6. .

Оценки свободных клеток: , , , , , .

План не оптимален, строим цикл перерасчета для клетки (1,4)

Новый опорный план заносим в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | | |  | | | |  | | |  | |  |
|  |  |  | 30 | | | 30 | | | | 90 | | | 10 | |  |
|  |  |  |
|  | 30 | |  | 3 | |  | 5 | | |  | 4 | |  | 1 |  |
|  | 30 | | -Q | - | |  | | - | |  | 0 | +Q |
|  | 40 | |  | 1 | |  | 8 | | |  | 2 | |  | 1 |  |
|  | - | | +Q | - | | |  | 40 | | -Q | - |  |
|  | 90 | |  | 3 | |  | 2 | | |  | 6 | |  | 9 |  |
|  | - | |  | 30 | | |  | 50 | | +Q | 10 | -Q |
|  |  | |  | | |  | | | |  | | |  | |  |

Базисных заполненных клеток 6. .

Оценки свободных клеток: , , , , , .

План не оптимален, строим цикл перерасчета для клетки (2,1)

Новый опорный план заносим в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | | |  | | | |  | | |  | |  |
|  |  |  | 30 | | | 30 | | | | 90 | | | 10 | |  |
|  |  |  |
|  | 30 | |  | 3 | |  | 5 | | |  | 4 | |  | 1 |  |
|  | 20 | |  | - | |  | | - | |  | 10 |  |
|  | 40 | |  | 1 | |  | 8 | | |  | 2 | |  | 1 |  |
|  | 10 | | -Q | - | | |  | 30 | | +Q | - |  |
|  | 90 | |  | 3 | |  | 2 | | |  | 6 | |  | 9 |  |
|  | - | | +Q | 30 | | |  | 60 | | -Q | - |  |
|  |  | |  | | |  | | | |  | | |  | |  |

Базисных заполненных клеток 6.

.

Оценки свободных клеток: , , , , ,

План не оптимален, строим цикл перерасчета для клетки (3,1)

Новый опорный план заносим в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | | |  | | | |  | | |  | |  |
|  |  |  | 30 | | | 30 | | | | 90 | | | 10 | |  |
|  |  |  |
|  | 30 | |  | 3 | |  | 5 | | |  | 4 | |  | 1 |  |
|  | 20 | | -Q | - | |  | | - | | +Q | 10 |  |
|  | 40 | |  | 1 | |  | 8 | | |  | 2 | |  | 1 |  |
|  | - | |  | - | | |  | 40 | |  | - |  |
|  | 90 | |  | 3 | |  | 2 | | |  | 6 | |  | 9 |  |
|  | 10 | | +Q | 30 | | |  | 50 | | -Q | - |  |
|  |  | |  | | |  | | | |  | | |  | |  |

Базисных заполненных клеток 6.

.

Оценки свободных клеток: , , , , ,

План не оптимален, строим цикл перерасчета для клетки (1,3)

Новый опорный план заносим в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | | |  | | | |  | | |  | |  |
|  |  |  | 30 | | | 30 | | | | 90 | | | 10 | |  |
|  |  |  |
|  | 30 | |  | 3 | |  | 5 | | |  | 4 | |  | 1 |  |
|  | - | |  | - | |  | | 20 | |  | 10 |  |
|  | 40 | |  | 1 | |  | 8 | | |  | 2 | |  | 1 |  |
|  | - | |  | - | | |  | 40 | |  | - |  |
|  | 90 | |  | 3 | |  | 2 | | |  | 6 | |  | 9 |  |
|  | 30 | |  | 30 | | |  | 30 | |  | - |  |
|  |  | |  | | |  | | | |  | | |  | |  |

Базисных заполненных клеток 6.

.

Оценки свободных клеток: , , , , , .

Положительных оценок нет, поэтому опорный план оптимален.

**Ответ.** Из первого совхоза необходимо перевезти 20 ц молока в третий населенный пункт и 10 ц в четвертый. Из второго совхоза 40 ц молока во второй населенный пункт, а из третьего совхоза по 30 ц молока в первый, второй и третий населенные пункты.

**№2.** Решить транспортную задачу условия, которой даны в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | | |  | | | |  | | |  |
|  |  |  | 140 | | | 270 | | | | 170 | | |  |
|  |  |  |
|  | 260 | |  | 5 | |  | 2 | | |  | 1 | |  |
|  | - | |  | - | |  | | 20 | |  |
|  | 210 | |  | 2 | |  | 13 | | |  | 8 | |  |
|  | - | |  | - | | |  | 40 | |  |
|  | 110 | |  | 1 | |  | 2 | | |  | 5 | |  |
|  | 30 | |  | 30 | | |  | 30 | |  |
|  |  | |  | | |  | | | |  | | |  |

Исходный план находить методом минимального элемента.

**Решение.** Это задача закрытого типа, т.к.

Получаем исходный опорный план методом минимального элемента. Заполняем таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | | |  | | | |  | | |  |
|  |  |  | 140 | | | 270 | | | | 170 | | |  |
|  |  |  |
|  | 260 | |  | 5 | |  | 2 | | |  | 1 | |  |
|  | - | |  | 90 | |  | | 170 | |  |
|  | 210 | |  | 2 | |  | 13 | | |  | 8 | |  |
|  | 30 | | +Q | 180 | | | -Q | - | |  |
|  | 110 | |  | 1 | |  | 2 | | |  | 5 | |  |
|  | 110 | | -Q | - | | | +Q | - | |  |
|  |  | |  | | |  | | | |  | | |  |

Таким образом, исходный опорный план:

Число базисных клеток . В добавленной таблице 5 заполненных клеток. Вычисляем .

Вычисляем оценки свободных клеток , , , .

План не оптимален. Строим в таблице цикл пересчета для клетки (3,2). Определяем :

Новый опорный план заносим в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | | |  | | | |  | | |  |
|  |  |  | 140 | | | 270 | | | | 170 | | |  |
|  |  |  |
|  | 260 | |  | 5 | |  | 2 | | |  | 1 | |  |
|  | - | |  | 90 | | +Q | | 170 | | -Q |
|  | 210 | |  | 2 | |  | 13 | | |  | 8 | |  |
|  | 140 | |  | 70 | | | -Q | - | | +Q |
|  | 110 | |  | 1 | |  | 2 | | |  | 5 | |  |
|  |  | |  | 110 | | |  | - | |  |
|  |  | |  | | |  | | | |  | | |  |

В таблице 5 базисных клеток. .

Вычисляем оценки свободных клеток , , , .

План не оптимален. Строим в таблице цикл пересчета для клетки (2,3). Определяем :

Новый опорный план заносим в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | | |  | | | |  | | |  |
|  |  |  | 140 | | | 270 | | | | 170 | | |  |
|  |  |  |
|  | 260 | |  | 5 | |  | 2 | | |  | 1 | |  |
|  | - | |  | 160 | |  | | 100 | |  |
|  | 210 | |  | 2 | |  | 13 | | |  | 8 | |  |
|  | 140 | |  | - | | |  | 70 | |  |
|  | 110 | |  | 1 | |  | 2 | | |  | 5 | |  |
|  |  | |  | 110 | | |  | - | |  |
|  |  | |  | | |  | | | |  | | |  |

В таблице 5 базисных клеток. .

Вычисляем оценки свободных клеток , , , .

Положительных оценок нет, поэтому опорный план оптимален.

**Ответ:**

При таком плане целевая функция достигает значения: .

**№3**. Имеется 3 участка земли, на которых можно засеять кукурузу, пшеницу, ячмень, просо. Площадь участков равна соответственно – 470 га, 180 га и 385 га. С учетом наличия семян этими культурами можно засеять соответственно 390, 10, 110 и 490 га. Затраты на обработку 1 га площади под соответствующую культуру заданы матрицей:

Определить, сколько га на каждом участке следует засеять, чтобы общие затраты были минимальны. Исходный план находить методом северо-западного угла.

**Решение.** Это задача открытого типа, т.к.

Перейдем к эквивалентной задаче закрытого типа. Введем пятую фиктивную культуру (поставщика) с объемом и с тарифами .

Получаем исходный опорный план методом северо-западного угла. Заполняем таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | | |  | | | |  | | |  |
|  |  |  | 470 | | | 180 | | | | 385 | | |  |
|  |  |  |
|  | 390 | |  | 30 | |  | 18 | | |  | 15 | |  |
|  | 390 | |  | - | |  | | - | |  |
|  | 10 | |  | 20 | |  | 10 | | |  | 18 | |  |
|  | 10 | |  | - | | |  | - | |  |
|  | 110 | |  | 15 | |  | 30 | | |  | 15 | |  |
|  | 70 | | -Q | 40 | | | +Q | - | |  |
|  | 490 | |  | | 5 |  | | | 50 |  | | 40 | 5 |
|  | - | | +Q | 140 | | | -Q | 350 | |  |
|  | 35 | |  | | 0 |  | | | 0 |  | | 0 |  |
|  | - | |  | - | | |  | 35 | |  |
|  |  | |  | | |  | | | |  | | |  |

Таким образом, исходный опорный план:

Число базисных клеток . В добавленной таблице 7 заполненных клеток.

Вычисляем .

Вычисляем оценки свободных клеток , , , , , , , . План не оптимален, т.к. есть положительные оценки.

Строим в таблице цикл пересчета для клетки (4,1). Определяем :

Новый опорный план заносим в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | | |  | | | |  | | |  |
|  |  |  | 470 | | | 180 | | | | 385 | | |  |
|  |  |  |
|  | 390 | |  | 30 | |  | 18 | | |  | 15 | |  |
|  | 390 | | -Q | - | | +Q | | - | |  |
|  | 10 | |  | 20 | |  | 10 | | |  | 18 | |  |
|  | 10 | |  | - | | |  | - | |  |
|  | 110 | |  | 15 | |  | 30 | | |  | 15 | |  |
|  | - | |  | 110 | | |  | - | |  |
|  | 490 | |  | | 5 |  | | | 50 |  | | 40 |  |
|  | 70 | | +Q | 70 | | | -Q | 350 | |  |
|  | 35 | |  | | 0 |  | | | 0 |  | | 0 |  |
|  | - | |  | - | | |  | 35 | |  |
|  |  | |  | | |  | | | |  | | |  |

В добавленной таблице 7 заполненных базисных клеток.

Вычисляем .

Вычисляем оценки свободных клеток , , , , , , , , . План не оптимален, т.к. есть положительные оценки.

Строим в таблице цикл пересчета для клетки (1,2). Определяем :

Новый опорный план заносим в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | | |  | | | |  | | |  |
|  |  |  | 470 | | | 180 | | | | 385 | | |  |
|  |  |  |
|  | 390 | |  | 30 | |  | 18 | | |  | 15 | |  |
|  | 320 | | -Q | 70 | |  | | - | | +Q |
|  | 10 | |  | 20 | |  | 10 | | |  | 18 | |  |
|  | 10 | |  | - | | |  | - | |  |
|  | 110 | |  | 15 | |  | 30 | | |  | 15 | |  |
|  | - | |  | 110 | | |  | - | |  |
|  | 490 | |  | | 5 |  | | | 50 |  | | 40 |  |
|  | 140 | | +Q | - | | |  | 350 | | -Q |
|  | 35 | |  | | 0 |  | | | 0 |  | | 0 |  |
|  | - | |  | - | | |  | 35 | |  |
|  |  | |  | | |  | | | |  | | |  |

В добавленной таблице 7 заполненных базисных клеток.

Вычисляем .

Вычисляем оценки свободных клеток , , , , , , , . План не оптимален, т.к. есть положительные оценки.

Строим в таблице цикл пересчета для клетки (1,3). Определяем :

Новый опорный план заносим в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | | |  | | | |  | | |  |
|  |  |  | 470 | | | 180 | | | | 385 | | |  |
|  |  |  |
|  | 390 | |  | 30 | |  | 18 | | |  | 15 | |  |
|  | - | |  | 70 | | -Q | | 320 | | +Q |
|  | 10 | |  | 20 | |  | 10 | | |  | 18 | |  |
|  | 10 | | -Q | - | | | +Q | - | |  |
|  | 110 | |  | 15 | |  | 30 | | |  | 15 | |  |
|  | - | |  | 110 | | |  | - | |  |
|  | 490 | |  | | 5 |  | | | 50 |  | | 40 | 25 |
|  | 460 | | +Q | - | | |  | 30 | | -Q |
|  | 35 | |  | | 0 |  | | | 0 |  | | 0 |  |
|  | - | |  | - | | |  | 35 | |  |
|  |  | |  | | |  | | | |  | | |  |

В добавленной таблице 7 заполненных базисных клеток.

Вычисляем .

Вычисляем оценки свободных клеток , , , , , , , . План не оптимален, т.к. есть положительные оценки.

Строим в таблице цикл пересчета для клетки (2,2). Определяем :

Новый опорный план заносим в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | | |  | | | |  | | |  |
|  |  |  | 470 | | | 180 | | | | 385 | | |  |
|  |  |  |
|  | 390 | |  | 30 | |  | 18 | | |  | 15 | |  |
|  | - | |  | 60 | | +Q | | 330 | | -Q |
|  | 10 | |  | 20 | |  | 10 | | |  | 18 | |  |
|  | - | |  | 10 | | |  | - | |  |
|  | 110 | |  | 15 | |  | 30 | | |  | 15 | |  |
|  | - | |  | 110 | | | -Q | - | | +Q |
|  | 490 | |  | | 5 |  | | | 50 |  | | 40 |  |
|  | 470 | |  | - | | |  | 20 | |  |
|  | 35 | |  | | 0 |  | | | 0 |  | | 0 |  |
|  | - | |  | - | | |  | 35 | |  |
|  |  | |  | | |  | | | |  | | |  |

В добавленной таблице 7 заполненных базисных клеток.

Вычисляем .

Вычисляем оценки свободных клеток , , , , , , , . План не оптимален, т.к. есть положительные оценки.

Строим в таблице цикл пересчета для клетки (3,3). Определяем :

Новый опорный план заносим в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | | |  | | | |  | | |  |
|  |  |  | 470 | | | 180 | | | | 385 | | |  |
|  |  |  |
|  | 390 | |  | 30 | |  | 18 | | |  | 15 | |  |
|  | - | |  | 170 | | -Q | | 220 | | +Q |
|  | 10 | |  | 20 | |  | 10 | | |  | 18 | |  |
|  | - | |  | 10 | | |  | - | |  |
|  | 110 | |  | 15 | |  | 30 | | |  | 15 | |  |
|  | - | |  | - | | |  | 110 | |  |
|  | 490 | |  | | 5 |  | | | 50 |  | | 40 |  |
|  | 470 | |  | - | | |  | 20 | |  |
|  | 35 | |  | | 0 |  | | | 0 |  | | 0 |  |
|  | - | |  | - | | | +Q | 35 | | -Q |
|  |  | |  | | |  | | | |  | | |  |

В добавленной таблице 7 заполненных базисных клеток.

Вычисляем .

Вычисляем оценки свободных клеток , , , , , , , . План не оптимален, т.к. есть положительные оценки.

Строим в таблице цикл пересчета для клетки (5,2). Определяем :

Новый опорный план заносим в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | | |  | | | |  | | |  |
|  |  |  | 470 | | | 180 | | | | 385 | | |  |
|  |  |  |
|  | 390 | |  | 30 | |  | 18 | | |  | 15 | |  |
|  | - | |  | 135 | |  | | 255 | |  |
|  | 10 | |  | 20 | |  | 10 | | |  | 18 | |  |
|  | - | |  | 10 | | |  | - | |  |
|  | 110 | |  | 15 | |  | 30 | | |  | 15 | |  |
|  | - | |  | - | | |  | 110 | |  |
|  | 490 | |  | | 5 |  | | | 50 |  | | 40 |  |
|  | 470 | |  | - | | |  | 20 | |  |
|  | 35 | |  | | 0 |  | | | 0 |  | | 0 |  |
|  | - | |  | 35 | | |  | - | |  |
|  |  | |  | | |  | | | |  | | |  |

В добавленной таблице 7 заполненных базисных клеток.

Вычисляем .

Вычисляем оценки свободных клеток , , , , , , , . План оптимален, т.к. нет положительных оценок.

**Ответ:** Кукурузой нужно засеять 135 га второго участка и 255 га третьего, пшеницей 10 га второго, ячменем 110 га третьего, а просо 470 га первого и 20 га третьего участков. На втором участке окажется не засеянными 35 га из-за нехватки семян.

Суммарная минимальная стоимость посевной составляет рублей.

**№4.** В резерве трех железнодорожных станций находится соответственно 50, 50 и 37 вагонов. Составить оптимальный план перегона этих вагонов к четырем пунктам погрузки зерна, каждому из которых требуется соответственно: 10, 50, 30 и 57 вагонов. Матрица тарифов:

Исходный план находить методом минимального элемента.

**Решение.**

Это задача открытого типа, т.к.

Перейдем к эквивалентной задаче закрытого типа. Введем четвертую фиктивную ж/д станцию с запасом и с тарифами

Получаем исходный опорный план методом минимального элемента. Заполняем таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | | |  | | | |  | | |  |  |  |
|  |  |  | 10 | | | 50 | | | | 30 | | | 57 | |  |
|  |  |  |
|  | 50 | |  | 3 | |  | 1 | | |  | 5 | |  | 2 |  |
|  | - | |  | 50 | |  | | - | |  | 0 |  |
|  | 50 | |  | 4 | |  | 6 | | |  | 7 | |  | 4 | 2 |
|  | 10 | |  | - | | |  | 20 | |  | 20 |  |
|  | 37 | |  | 3 | |  | 8 | | |  | 15 | |  | 3 |  |
|  | - | |  | - | | |  | - | |  | 37 |  |
|  | 10 | |  | | 0 |  | | | 0 |  | | 0 |  | 0 | -5 |
|  | - | |  | - | | |  | 10 | |  | - |  |
|  |  | |  | | |  | | | |  | | |  |  |  |

Таким образом, исходный опорный план:

Число базисных клеток . В добавленной таблице 7 заполненных клеток.

Вычисляем .

Вычисляем оценки свободных клеток , , , , , , , , . План оптимален, т.к. нет положительных оценок.

**Ответ**. Из первого депо необходимо перегнать 50 поездов во второй пункт погрузки зерна, из второго депо 10 поездов в первый пункт, 20 в третий и 20 в четвертый, из третьего депо 37 вагонов в четвертый пункт. Третий пункт приема зерна не удовлетворен полностью, он получает только 20 вагонов вместо 30.

Суммарная минимальная стоимость перегона вагонов составляет 421 рубль.

**Задание №7-1**

Решить методами Гомори следующие задачи линейного целочисленного программирования. Сопровождайте решение графической иллюстрацией.

**Решение:**

1-ый шаг. Приведем к стандартному виду исходную ЗЛП и решим ее симплекс- методом.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 1 | 2 | 0 | 0 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |
| 0 |  | | 1 | **3** | 1 | 0 | 6 | 2 (min) |
| 0 |  | | 2 | 1 | 0 | 1 | 4 | 4 |
|  | | | -1 | -2 | 0 | 0 | 0 |  |
| 2 |  | |  | 1 |  | 0 | 2 | 6 |
| 0 |  | |  | 0 |  | 1 | 2 | - min |
|  | | |  | 0 |  | 0 | 4 |  |
| 2 |  | | 0 | 1 |  |  |  |  |
| 1 |  | | 1 | 0 |  |  |  |  |
|  | | | 0 | 0 |  |  |  |  |
|  |  | |  |  |  |  |  |  |

Оптимальное решение .

Решение нецелочисленное, переходим ко второму шагу.

2-ой шаг. Строим Правильное отсечение по любой из строк, соответствующих нецелочисленной переменной, например, по первой строке.

Новое ограничение имеет вид:

3-ой шаг. Вводим это ограничение в систему ограничений исходной З.Л.П. Новое неравенство эквивалентно уравнению:

Новая З.Л.П. имеет вид:

Первые два уравнения эквивалентны уравнениям, приведенным к базисным переменным , , которые выписываем из последней таблицы решения исходной З.Л.П.; с учетом этого задача примет вид:

Т.к. в четвертом уравнении переменная входит со знаком минус, введем в него базисную искусственную переменную и решим следующую – задачу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | 0 | 0 | 0 |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |
|  |  | | 0 | 1 |  |  | 0 | 0 |  |  |
|  |  | | 1 | 0 |  |  | 0 | 0 |  | 2 (min) |
|  |  | | 0 | 0 |  |  | -1 | 1 |  | 4 |
|  | | | 0 | 0 |  |  |  | 0 |  |  |
| 2 |  | |  | 1 |  | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 |
| 0 |  | |  | 0 |  | 1 | 0 | 0 | 2 |  |
|  |  | |  | 0 |  | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 (min) |
|  | | |  | 0 |  | 0 |  | 0 | 4 |  |
| 2 |  | | 1 | 1 | 0 | 0 |  |  | 2 |  |
| 1 |  | | 1 | 0 | 0 | 1 |  |  | 2 |  |
|  |  | | -2 | 0 | 1 | 0 |  |  | 0 |  |
|  | | | 1 | 0 |  |  | 1 | 0 |  |  |
|  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |

Оптимальное решение .

Значение всех переменных целочисленные, поэтому оптимальное целочисленное решение исходной З.Л.Ц.П.: .

**Задание №7-2** Решить методами Ленд и Дойг следующие задачи линейного целочисленного программирования. Сопровождайте решение графической иллюстрацией.

Решение: Решаем ЗЛП графически

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
| 0 | 2 |  | 0 | 4 |
| 6 | 0 |  | 2 | 0 |

Таким образом, многогранник решений . Видно, что целевая функция достигает своего максимума в точке B, являющейся пересечением двух прямых

Оптимальной точкой является точка .

План не целочисленный, поэтому множество разобьем на два подмножества и по любой нецелочисленной координате плана , например по :

|  |  |
| --- | --- |
| ЗЛП 1. | ЗЛП 2. |
|  |  |

D

Решаем графически эти задачи.

Областью решений задачи 1 является , это подмножество . Оптимальной точкой является точка . Ее координаты определяются из уравнений:

Таким образом, . Оценка подмножества .

Областью решений задачи 1 является точка , это подмножество . Оптимальной точкой является точка . Оценка подмножества .

Т.к. наибольшей оценке соответствует нецелочисленное решение, то продолжаем. Разбиваем подмножество на два подмножества и по координате . Затем решаем следующие две задачи линейного программирования:

|  |  |
| --- | --- |
| ЗЛП 1. | ЗЛП 2. |
|  |  |

Решаем графически эти задачи.

Областью решений задачи 1 является , это подмножество . Оптимальной точкой является точка . Оценка подмножества .

Областью решений задачи 1 является точка , это подмножество . Оптимальной точкой является точка . Оценка подмножества .

Наибольшая оценка у подмножества , . Этому подмножеству соответствует целочисленное решение , которое будет оптимальным решением ЗЛЦП. Схема решения – дерево решений имеет вид:xxx\_

**Ответ:** Оптимальный целочисленный план . При нем целевая функция достигает значения: .

**Задание №8**

Между четырьмя предприятиями следует распределить 120 тыс. рублей. Значение прироста выпуска продукции на предприятиях в зависимости от выделенной суммы даются в таблице. Составить план распределения средств, максимизирующий общий прирост выпуска продукции. Задачу решить методом динамического программирования.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 |
|  | 0 | 13 | 31 | 42 | 62 | 72 | 76 |
|  | 0 | 12 | 26 | 36 | 54 | 76 | 78 |
|  | 0 | 11 | 36 | 45 | 60 | 75 | 77 |
|  | 0 | 16 | 37 | 46 | 63 | 78 | 80 |

**Решение**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Средства*  *тыс. руб* | *1-е предприятие* | *2-е предприятие* | *3-е предприятие* | *4-е предприятие* |
|  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 13 | 12 | 11 | 16 |
| 40 | 31 | 26 | 36 | 37 |
| 60 | 42 | 36 | 45 | 46 |
| 80 | 62 | 54 | 60 | 63 |
| 100 | 72 | 76 | 75 | 78 |
| 120 | 76 | 78 | 77 | 80 |

Составим математическую модель задачи:

Пусть – количество денег, выделяемое предприятию . Тогда:

Выполним сначала прямой ход. Он состоит из четырех шагов.

**Прямой ход**

**Шаг 1**. . Формула принимает вид:, так как .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 0 | 0 |
| 20 | 13 | 20 |
| 40 | 31 | 40 |
| 60 | 42 | 60 |
| 80 | 62 | 80 |
| 100 | 72 | 100 |
| 120 | 76 | 120 |

**Шаг 2.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 |
|  |  |
| 0 | | 0+0=0 |  |  |  |  |  |  |
| 20 | | 0+13=13 | 12+0=12 |  |  |  |  |  |
| 40 | | 0+31=31 | 12+13=25 | 26+0=26 |  |  |  |  |
| 60 | | 0+42=42 | 12+31=43 | 26+13=39 | 36+0=36 |  |  |  |
| 80 | | 0+62=62 | 12+42=54 | 26+31=57 | 36+13=49 | 54+0=54 |  |  |
| 100 | | 0+72=72 | 12+62=74 | 26+42=68 | 36+31=67 | 54+13=67 | 76+0=76 |  |
| 120 | | 0+76=76 | 12+72=84 | 26+62=88 | 36+42=78 | 54+31=85 | 76+13=89 | 78+0=78 |

Выбираем в каждой строке наибольшее значение и соответствующее ему значение и заполняем таблицу 2:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 0 | 0 |
| 20 | 13 | 0 |
| 40 | 31 | 0 |
| 60 | 43 | 20 |
| 80 | 62 | 0 |
| 100 | 74 | 20 |
| 120 | 89 | 100 |

**Шаг 3.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 |
|  |  |
| 0 | | 0+0=0 |  |  |  |  |  |  |
| 20 | | 0+13=13 | 11+0=12 |  |  |  |  |  |
| 40 | | 0+31=31 | 11+13=24 | 36+0=36 |  |  |  |  |
| 60 | | 0+43=43 | 11+31=42 | 36+13=49 | 45+0=45 |  |  |  |
| 80 | | 0+62=62 | 11+43=54 | 36+31=67 | 45+13=58 | 60+0=60 |  |  |
| 100 | | 0+74=74 | 11+62=73 | 36+43=79 | 45+31=76 | 60+13=73 | 75+0=75 |  |
| 120 | | 0+89=89 | 11+74=85 | 36+62=98 | 45+43=88 | 60+31=91 | 75+13=88 | 77+0=77 |

Выбираем в каждой строке наибольшее значение и соответствующее ему значение и заполняем таблицу 3:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 0 | 0 |
| 20 | 13 | 0 |
| 40 | 36 | 40 |
| 60 | 49 | 40 |
| 80 | 67 | 40 |
| 100 | 79 | 40 |
| 120 | 98 | 40 |

**Шаг 4.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 |
|  |  |
| 0 | | 0+0=0 |  |  |  |  |  |  |
| 20 | | 0+13=13 | 16+0=16 |  |  |  |  |  |
| 40 | | 0+36=36 | 16+13=29 | 37+0=37 |  |  |  |  |
| 60 | | 0+49=49 | 16+36=52 | 37+13=50 | 46+0=46 |  |  |  |
| 80 | | 0+67=67 | 16+49=65 | 37+36=73 | 46+13=59 | 63+0=63 |  |  |
| 100 | | 0+79=79 | 16+67=83 | 37+49=86 | 46+36=82 | 63+13=76 | 78+0=78 |  |
| 120 | | 0+98=98 | 16+79=95 | 37+67=104 | 46+49=95 | 63+36=99 | 78+13=91 | 80+0=80 |

Выбираем в каждой строке наибольшее значение и соответствующее ему значение и заполняем таблицу 4:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 0 | 0 |
| 20 | 16 | 20 |
| 40 | 37 | 40 |
| 60 | 52 | 20 |
| 80 | 73 | 40 |
| 100 | 86 | 40 |
| 120 | 104 | 40 |

**Обратный ход**

Из последней таблицы находим , это значение , и соответствующее ему значение: .

Итак, четвертому предприятию выделяется 40 тысяч рублей. Остаток денег: распределяем между третьим, вторым и первым предприятием.

Из таблицы 3 находим . Остаток денег .

Из таблицы 2 находим: . Остаток денег .

*.*

Итак, получили:

И максимальный общий прирос выпуска продукции равный 104.

**Проверка:**

**Задание №9**

Решите методом динамического программирования следующие задачи, учитывая целочисленность и неотрицательность переменных:

**Решение**

Целевая функция является аддитивной, так как ее можно представить в виде суммы функций, каждая из которых зависит только от одной переменной.

где , .

Формула Беллмана для шага имеет вид: .

**Шаг 1**. при ограничении , то есть

Таблица 1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |  |  |  |  |
|  |  |  |
| 0 | | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  | 0 | 0 | 0 |
| 1 | | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | 0 | 0 |
| 2 | | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  | 2 | 0 | 0 |
| 3 | | 0 | 3 |  |  |  |  |  |  |  | 3 | 3 | 1 |
| 4 | | 0 | 3 |  |  |  |  |  |  |  | 4 | 3 | 1 |
| 5 | | 0 | 3 |  |  |  |  |  |  |  | 5 | 3 | 1 |
| 6 | | 0 | 3 | 8 |  |  |  |  |  |  | 6 | 8 | 2 |
| 7 | | 0 | 3 | 8 |  |  |  |  |  |  | 7 | 8 | 2 |
| 8 | | 0 | 3 | 8 |  |  |  |  |  |  | 8 | 8 | 2 |
| 9 | | 0 | 3 | 8 | 15 |  |  |  |  |  | 9 | 15 | 3 |
| 10 | | 0 | 3 | 8 | 15 |  |  |  |  |  | 10 | 15 | 3 |
| 11 | | 0 | 3 | 8 | 15 |  |  |  |  |  | 11 | 15 | 3 |
| 12 | | 0 | 3 | 8 | 15 | 24 |  |  |  |  | 12 | 24 | 4 |
| 13 | | 0 | 3 | 8 | 15 | 24 |  |  |  |  | 13 | 24 | 4 |
| 14 | | 0 | 3 | 8 | 15 | 24 |  |  |  |  | 14 | 24 | 4 |

**Шаг 2**. при ограничении , то есть

Таблица 2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |  |  |  |  |
|  |  |  |
| 0 | | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  | 0 | 0 | 0 |
| 1 | | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | 0 | 0 |
| 2 | | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  | 2 | 0 | 0 |
| 3 | | 0+3 |  |  |  |  |  |  |  |  | 3 | 3 | 0 |
| 4 | | 0+3 | 3+0 |  |  |  |  |  |  |  | 4 | 3 | 0 |
| 5 | | 0+3 | 3+0 |  |  |  |  |  |  |  | 5 | 3 | 0 |
| 6 | | 0+8 | 3+0 |  |  |  |  |  |  |  | 6 | 8 | 0 |
| 7 | | 0+8 | 3+3 |  |  |  |  |  |  |  | 7 | 8 | 0 |
| 8 | | 0+8 | 3+3 | 4+0 |  |  |  |  |  |  | 8 | 8 | 0 |
| 9 | | 0+15 | 3+3 | 4+0 |  |  |  |  |  |  | 9 | 15 | 0 |
| 10 | | 0+15 | 3+8 | 4+0 |  |  |  |  |  |  | 10 | 15 | 0 |
| 11 | | 0+15 | 3+8 | 4+3 |  |  |  |  |  |  | 11 | 15 | 0 |
| 12 | | 0+24 | 3+8 | 4+3 |  |  |  |  |  |  | 12 | 24 | 0 |
| 13 | | 0+24 | 3+15 | 4+3 | 3+0 |  |  |  |  |  | 13 | 24 | 0 |
| 14 | | 0+24 | 3+15 | 4+8 | 3+0 |  |  |  |  |  | 14 | 24 | 0 |

**Шаг 3**. при ограничении , то есть

Таблица 3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |  |  |  |  |
|  |  |  |
| 0 | | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  | 0 | 0 | 0 |
| 1 | | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 | 0 | 0 |
| 2 | | 0 |  |  |  |  |  |  |  |  | 2 | 0 | 0 |
| 3 | | 0+3 |  |  |  |  |  |  |  |  | 3 | 3 | 0 |
| 4 | | 0+3 |  |  |  |  |  |  |  |  | 4 | 3 | 0 |
| 5 | | 0+3 |  |  |  |  |  |  |  |  | 5 | 3 | 0 |
| 6 | | 0+8 | 0 |  |  |  |  |  |  |  | 6 | 8 | 0 |
| 7 | | 0+8 | 0 |  |  |  |  |  |  |  | 7 | 8 | 0 |
| 8 | | 0+8 | 0 |  |  |  |  |  |  |  | 8 | 8 | 0 |
| 9 | | 0+15 | 0+3 |  |  |  |  |  |  |  | 9 | 15 | 0 |
| 10 | | 0+15 | 0+3 |  |  |  |  |  |  |  | 10 | 15 | 0 |
| 11 | | 0+15 | 0+3 |  |  |  |  |  |  |  | 11 | 15 | 0 |
| 12 | | 0+24 | 0+8 | 2 |  |  |  |  |  |  | 12 | 24 | 0 |
| 13 | | 0+24 | 0+8 | 2 |  |  |  |  |  |  | 13 | 24 | 0 |
| 14 | | 0+24 | 0+8 | 2 |  |  |  |  |  |  | 14 | 24 | 0 |

**Обратный ход**

Из таблицы 3 находим максимальное значение . Этому значению соответствует , и , , . Можно использовать любое из них, возьмем , тогда значение , будем находить для таблицы 2 для и . Значение найдем и таблицы 1 для и .

Оптимальная стратегия (решение) имеет вид: .

**Проверка:**

**Задание №10**

Найти оптимальное соотношение площадей под сельскохозяйственные культуры. Состояния погоды и значения прибылей даны в таблице:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Тип с/х  культуры | Теплая,  сухая | Теплая,  влажная | Холодная,  сухая | Холодная,  влажная |
| Пшеница | 15 | 16 | 10 | 11 |
| Рожь | 9 | 10 | 11 | 13 |
| Кукуруза | 17 | 16 | 8 | 8 |

**Решение**

Задача сводится к игре, в которой с/х культура – это игрок A, спрос – игрок B; C – платежная матрица. У игрока А есть три стратегии, у игрока B есть четыре стратегии.

Проведем анализ матрицы С. Стратегия является явно невыгодной для игрока , так как все элементы этого столбца больше или равны элементам третьего столбца.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  | |
|  |  |
|  | | 15 | 16 | 10 |  | |
|  | | 9 | 10 | 11 |  | |
|  | | 17 | 16 | 8 |  | |
|  | |  |  | 11 |  |  |
|  |  |

– седловой точки нет.

Решение игры будем искать в смешанных стратегиях.

Стратегия игрока A:

Стратегия игрока B:

Все значения , поэтому записываем пару двойственных задач, эквивалентных игре.

|  |  |
| --- | --- |
| Задача A | Задача B |
|  |  |

Решим задачу B симплекс-методом. Для этого, приведем ее к стандартному виду:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |
| 0 |  | | 15 | 16 | 10 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1/15 |
| 0 |  | | 9 | 10 | 11 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1/9 |
| 0 |  | | **(17)** | 16 | 8 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1/17 |
|  | | | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| 0 |  | | 0 | 32/17 | **(50/17)** | 1 | 0 | -15/17 | 2/17 | 2/50 |
| 0 |  | | 0 | 26/17 | 115/17 | 0 | 1 | -9/17 | 8/17 | 8/115 |
| 1 |  | | 1 | 16/17 | 8/17 | 0 | 0 | 1/17 | 1/17 | 1/8 |
|  | | | 0 | -1/17 | -9/17 | 0 | 0 | 1/17 | 1/17 |  |
| 1 |  | | 0 | 16/25 | 1 | 17/50 | 0 | -3/10 | 1/25 |  |
| 0 |  | | 0 | -14/5 | 0 | -23/10 | 1 | **(3/2)** | 1/5 | 2/15 |
| 1 |  | | 1 | 16/25 | 0 | -4/25 | 0 | 1/5 | 1/25 | 1/5 |
|  | | | 0 | 7/25 | 0 | 9/50 | 0 | -1/10 | 2/25 |  |
| 1 |  | | 0 | 2/25 | 1 | -3/25 | 1/5 | 0 | 2/25 |  |
| 0 |  | | 0 | -28/15 | 0 | -23/15 | 2/3 | 1 | 2/15 |  |
| 1 |  | | 1 | 76/75 | 0 | 11/75 | -2/15 | 0 | 1/75 |  |
|  | | | 0 | 7/75 | 0 | 2/75 | 1/15 | 0 | 7/75 |  |
|  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |

Оптимальное решение задачи B:

Оптимальное решение задачи A:

Или ;

Цена игры .

Найдем значения для и по формулам:

**Ответ:** предприятие должно выпустить и ржи. При этом погода в будет находиться в состоянии теплая, сухая и в будет находиться в состоянии холодная, сухая. Максимальная прибыль агрофирмы .

**Задание №11**

В магазин можно завезти три типа товаров. Если завезенный товар пользуется спросом, то магазин получает прибыль от его реализации, если спроса нет, то понесет убытки от хранения и порчи. Данные о доходах и убытках даны в таблице. Определить типы товаров, которые следует завезти в магазин и процентное соотношение товаров.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Тип товара** | **1** | **2** | **3** |
| **Прибыль** | 12 | 13 | 14 |
| **Убыток** | 2 | 1 | 1 |

**Решение**